

MATEMATICA III

CORSO DI LAUREA IN STATISTICA, ECONOMIA, FINANZA E ASSICURAZIONI
FACOLTÀ DI INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE, INFORMATICA E STATISTICA
SAPIENZA UNIVERSITÀ DI ROMA
A.A. 22/23

DOCENTE: DOTT. GIULIO GALISE

Cognome e nome:

Numero di matricola:

Prova scritta del 14.03.2023

Esercizio 1 (7 punti). Si consideri l'insieme

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x\sqrt{|y|} = 0\}.$$

Dire (senza giustificare la risposta) se le seguenti affermazioni sono vere o false:

- X è chiuso;
- X è convesso;
- $\mathbb{R}^2 \setminus X$ è un aperto connesso;
- $(0, 0) \in \partial(\mathbb{R}^2 \setminus X)$.

Scrivere l'espressione di una funzione $f = f(x, y)$ il cui insieme di definizione è $\mathbb{R}^2 \setminus X$.

Esercizio 2 (9 punti). Calcolare ¹

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2y) - x^3 + 2y^3}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Detto ℓ il valore di tale limite stabilire se la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2y) - x^3 + 2y^3}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ \ell & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- (i) è derivabile in $(0, 0)$;
- (ii) è differenziabile in $(0, 0)$;
- (iii) ammette tutte le derivate direzionali in $(0, 0)$ (e in caso affermativo calcolarle).

¹Può essere utile la disuguaglianza $|\sin(t)| \leq |t|$ per ogni $t \in \mathbb{R}$

Esercizio 3 (9 punti). Determinare, se esistono, massimo e minimo assoluti della funzione

$$f(x, y) = 2x - |y - 2x|y$$

nel rettangolo $R = [0, \frac{1}{2}] \times [0, 1]$.

Determinare poi

$$\inf_{\mathbb{R}^2} f \quad \text{e} \quad \sup_{\mathbb{R}^2} f.$$

Esercizio 4 (8 punti). Sia

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{1 - \frac{\pi}{4}} \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x^2 \right\}.$$

(i) Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_D x \cos(y) \, dx dy.$$

(ii) Stabilire, motivando la risposta, quale dei seguenti due integrali è maggiore o uguale dell'altro

$$\iint_D \log \left(e + \frac{\pi}{4} - 1 + x^2 + y^2 \right) \, dx dy \quad , \quad \iint_D \sin^5(x \cos(y)) \, dx dy.$$